

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Аддитивная комбинаторика
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Цель курса - дать основы активно развивающейся науки, которой является аддитивная комбинаторика. Основным объектом изучения аддитивной комбинаторики - сумма двух множеств. В курсе будут покрыты вопросы экстремальной аддитивной теории, которая изучает структуру множеств, у которых сумма мала. Курс покрывает классическую теорему Фреймана, неравенства Плуннеке-Ружи, теорему Воспера, теорему Кнезера и другие вещи, касающиеся в основном экстремальной аддитивной теории.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

освоение аддитивной комбинаторики

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области аддитивной комбинаторики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области аддитивной комбинаторики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области аддитивной комбинаторики.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

**3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)**

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;  
 современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;  
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
 основные свойства соответствующих математических объектов;  
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий****4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Неравенство Плюмке	6	6		
2	Группы полиномиального роста	6	6		
3	Группы, порождённые автоматами.	6	6		10
4	Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$ .	6	6		10
5	Метод Нильсена	6	6		10
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	90 час., 2 зач.ед.
--------------------	--------------------

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

##### 1. Неравенство Плюннеке

Простейшие соотношения между размерами сумм множеств.

##### 2. Группы полиномиального роста

Рост сложности группы.

##### 3. Группы, порождённые автоматами.

Действия на корневых деревьях.

##### 4. Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$ .

Теорема Балога-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.

##### 5. Метод Нильсена

Его геометрическая интерпретация.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Комбинаторная логика в программировании. Вычисления с объектами в примерах и задачах [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. Э. Вольфенгаген ; НОУ Ин-т Актуального образования "ЮрИнфоР-МГУ, Каф. перспективных компьт. исслед. и информ. технологий .— 3-е изд., доп. и перераб. — М. : Ин-т "ЮрИнфоР-МГУ, 2008 .— 384 с.
2. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 318 с.
3. Основы комбинаторики и теории чисел [Текст] : сборник задач : учеб. пособие для вузов / А. А. Глибичук [и др.] .— Долгопрудный : Изд. Дом "Интеллект", 2015 .— 104 с.

##### Дополнительная литература

1. Вероятность и алгебра в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2010 .— 48 с.

#### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://web.stanford.edu/class/ee364b/lectures.html>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>4</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аддитивная комбинаторика» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;
- современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

#### **владеть:**

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Текущий контроль

Вопрос 1. Неравенство треугольника Ружи.

Вопрос 2. Аддитивная энергия. Оценки на аддитивную энергию. Доказательство утверждения о том, что множество с маленькой суммой имеет большую аддитивную энергию.

Примеры задач:

Задача 1. Given an arbitrary abelian group  $G$ . For any subgroup  $H \leq G$  and any subset  $S$  denote  $S/H := \{s + H : s \in S\} \subseteq G/H$ . Suppose that  $A$  and  $B$  are arbitrary nonempty subsets of the group  $G$  and  $H = H(A + B)$ . Prove that either  $|A + B| > |A| + |B|$ , or  $|(A + B)/H| = |A/H| + |B/H| - 1$ .

Задача 2. Выведите из теоремы Кнезера следующее утверждение: Пусть  $m > 2$  и  $A, B$  непустые подмножества  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Если  $0 \notin B$  и  $(b, m) = 1$  для любого элемента  $b \in B \setminus \{0\}$ , то  $|A + B| > \min\{m, |A| + |B| - 1\}$ . Эта теорема была доказана И. Човлой и носит его имя.

Задача 3. Для любых непустых конечных подмножеств  $A$  и  $B$  произвольной абелевой группы  $G$  доказать, что эквивалентны следующие утверждения: 1)  $|A + B| = |A||B|$ . 2)  $|A \cdot B| = |A||B|$ . 3)  $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A||B|$ . 4)  $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 b_1 = a_2 b_2\}| = |A||B|$ . 5)  $|A \setminus (x + B)| = 1$  для любых  $x \in A + B$ . 6)  $|A \setminus (B + y)| = 1$  для любых  $y \in A \cdot B$ . 7)  $(A \cdot A) \cap (B \cdot B) = \{0\}$ .

Задача 4. Рассмотрим два произвольных конечных подмножества  $A, B$  произвольного поля  $F$ , состоящих по меньшей мере из двух элементов. Докажите, что для произвольного ненулевого элемента  $c \in F$  неравенство  $|A + cB| < |A||B|$  выполнено тогда и только тогда, когда найдутся элементы  $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ , такие, что  $c = a_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot b_1^{-1}$ . Напомним, что множество  $cB = \{c \cdot b : b \in B\}$ . Задача 5. Рассмотрим произвольное конечное поле  $F$  и любое его подполе  $P \subseteq F$ . Докажите, что для произвольных ненулевых элементов  $c, d \in F \setminus \{0\}$  множество  $A = c + dP$  удовлетворяет равенствам  $|A + A| = |A|$  и  $|A \cdot A| = |A|$  одновременно тогда и только тогда, когда  $c \in dP$ .

Задача 6. Докажите, что некоторое подмножество  $A$  поля  $F$  ( $|A| > 2, |F| > 2$ ) удовлетворяет равенствам  $|A \cdot A| = |A|$  и  $|A + A| = |A|$  одновременно тогда и только тогда, когда  $A$  есть мультипликативный сдвиг некоторого подполя  $P \subseteq F$ , то есть существуют элемент  $c \in F$ , такие, что  $A = cP$ .

Задача 7. Пусть  $p$  произвольное простое число и  $c_1, c_2, \dots, c_k$  любые ненулевые коэффициенты из  $\mathbb{Z}_p$ . Рассмотрим функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2^2 + \dots + c_k x_k^k$ . Докажите, что сравнение  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv n \pmod{p}$  разрешимо для любого  $n$ .

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Введение. Простейшие соотношения между размерами сумм множеств. Неравенство Плуннеке. Универсальные множества.
2. Структура множеств с малым удвоением. Леммы о покрытиях. Теорема Фреймана в группах с кручением.



3. Анализ Фурье на абелевых группах. Равномерные множества первого порядка. Теорема Рота.
4. Лемма регулярности Семереди. Теорема Ружи-Семереди о треугольниках.
5. Большие тригонометрические суммы.
6. Свойства множеств Бора.
7. Почти периодичность сверток характеристических функций. Арифметические прогрессии в суммах множеств.
8. Теорема Фреймана, полиномиальная гипотеза Боголюбова — современные оценки.
9. Теорема Балог-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.
10. Конструкция Беренда множеств без решений аффинных уравнений. Верхние оценки.
11. Нормы Гауэрса, равномерные множества старших порядков.
12. Теорема Семереди-Троттер, выпуклые множества. Суммы произведений: вещественный случай.

Темы для курсовых работ:

1. Суммы произведений: конечные поля, равномерная распределенность мультипликативных подгрупп.
2. Проблема Какея.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.